5.2 Unterräume

In der Praxis beschäftigen wir uns oft mit **Teilmengen** eines Vektorraums V. Um die nützlichen Vektorraumeigenschaften übertragen zu können, ist es wünschenswert, dass diese **Teilmengen selbst Vektorräume sind**. Aus diesem Grund führt man den Begriff des **Unterraumes** (oder Untervektorraum) ein.

5.2.1 Definition

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

► Definition 5.2 (Unterraum)

Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt **Unterraum** (oder **Untervektorraum**), wenn U die folgenden 3 Bedingungen (Axiome) erfüllt (Abb. 5.2):

(UR0) $0 \in U$;

(UR1) Für alle $u, v \in U$ gilt $u + v \in U$ (**Abgeschlossenheit bzgl. der Addition**);

(UR2) Für alle $u \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha \cdot u \in U$ (**Abgeschlossenheit bzgl. der Skalarmultiplikation**). ◄

Bemerkung

Eigenschaften (UR1) und (UR2) besagen, dass U bezüglich der Addition „+" bzw. der Skalarmultiplikation „·" **abgeschlossen** ist. Weil V ein Vektorraum ist, reichen die Bedingungen (UR0)–(UR2) damit $U \subset V$ selbst eine Vektorraumstruktur besitzt.

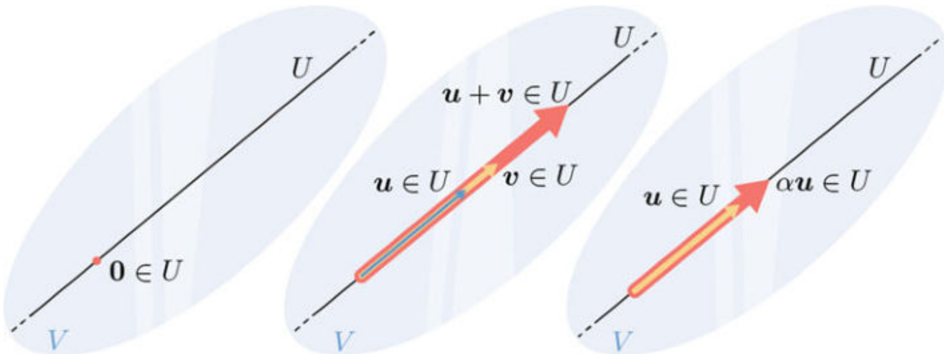

Abb. 5.2 Grafische Darstellung der 3 Bedingungen (UR0)–(UR2) eines Unterraumes (Definition 5.2). Hier sind diese Bedingungen anhand einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt gezeigt

Praxistipp

Die Unterraumsaxiome (UR1) und (UR2) kann man zu einer einzigen äquivalenten kompakten Bedingung zusammenfassen:

(**UR**) Für alle $u, v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt $\alpha \cdot u + v \in U$

In der Praxis kann man entweder Bedingungen (UR1) und (UR2) oder die kompakte Bedingung (UR) überprüfen.

Musterbeispiel: Unterraumbedingungen untersuchen

Praxistipp

Wenn man in der Praxis zeigen will, ob eine vorgelegte Menge $U \subset V$ ein Unterraum von V ist, muss man einfach die 3 Bedingungen (UR0)–(UR2) der Definition 5.2 überprüfen:

(UR0) Das Nullelement 0 muss in U enthalten sein.

(UR1) Wenn man zwei Elemente u, v aus U addiert, muss das Ergebnis $u + v$ auch wieder in U sein (U muss abgeschlossen bezüglich der Addition sein).

(UR2) Wenn man ein Element u aus U mit einem beliebigen Skalar $\alpha \in \mathbb{K}$ multipliziert, muss das Ergebnis $\alpha \cdot u$ auch wieder in U sein (U muss abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation sein).

Alternativ kann man (UR0) und die kompakte Bedingung (UR) nachweisen.

Musterbeispiel 5.2 (Beweis, dass *U* ein Unterraum ist)

Als Beispiel untersuchen wir, ob $U = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, v_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Wir überprüfen, ob die gegebene Menge U die **3 Bedingungen eines Untervektorraums (Definition 5.2)** erfüllt.

- Beweis von **(UR0)**: Der Nullvektor $\mathbf{0} = [0, 0]^T$ ist in U enthalten, weil die zweite Komponente von $\mathbf{0}$ trivialerweise gleich Null ist. ✓
- Beweis von **(UR1)**: Es seien $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ zwei beliebige Elemente aus U. Wir müssen zeigen, dass auch deren Summe $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ in U liegt. Es gilt:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Die zweite Komponente von $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ ist somit auch gleich Null. Folglich ist $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U$. ✓
- Beweis von **(UR2)**: Wir betrachten ein beliebiges Element $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ aus U. und eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir müssen nachweisen, dass $\alpha\, \boldsymbol{v} \in U$. Es gilt:

$$\alpha\, \boldsymbol{v} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, v_1 \\ \alpha\, 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha\, \boldsymbol{v} \in U \checkmark$$

Da die 3 Bedingungen (UR0), (UR1) und (UR2) erfüllt sind, ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung

Musterbeispiel 5.2 war ein einfaches Beispiel, aber prinzipiell kann man das Vorgehen auch auf komplexere Beispiele übertragen. Das Einzige, was sich ändert, ist die Definition von U sowie die „Rechenregeln“, die man anwenden muss.

5.2.2 Beispiele von Unterräumen

► Beispiel

Unterräume von $\mathbb{K}^n$

- Menge mit dem Nullpunkt $\{0\}$ (dies ist der **triviale Unterraum**);
- alle Geraden durch den Nullpunkt;
- alle Ebenen durch den Nullpunkt;
- alle Hyperebenen durch den Nullpunkt;
- der ganze $\mathbb{K}^n$.

Geraden und Ebenen, welche nicht durch den Nullpunkt gehen, sind keine Unterräume von $\mathbb{K}^n$ (**jeder Unterraum muss immer den Nullpunkt enthalten, wegen (UR0)**). Sie heißen **affine Räume** (► vgl. Abschn. 5.3). ◄

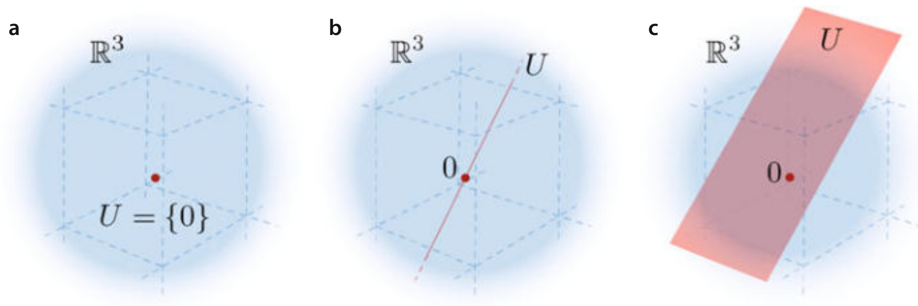

Abb. 5.3 Unterräume von $\mathbb{R}^3$. (**a**) Trivialer Unterraum $U = \{0\}$, (**b**) Gerade durch den Nullpunkt, (**c**) Ebene durch den Nullpunkt

► **Beispiel**

Unterräume von $\mathbb{K}^{n\times n}$. Die folgenden drei Mengen sind wichtige Beispiele von Unterräumen von $\mathbb{K}^{n\times n}$:
- $\mathrm{Diag}_n(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}$ ist diagonal$\}$ = diagonale Matrizen;
- $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}\}$ = symmetrische Matrizen;
- $\mathrm{Skew}_n(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}\}$ = schiefsymmetrische Matrizen.

Wichtige Teilmengen von $\mathbb{R}^{n\times n}$, welche **keine** Unterräume sind:
- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}$ ist invertierbar$\}$ = invertierbare Matrizen;
- $O_n(\mathbb{R}) := \{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}\}$ = orthogonale Matrizen. ◄

Bemerkung

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $O_n(\mathbb{R})$ sind wichtige bekannte abelsche Gruppen bezüglich der Matrixmultiplikation. GL = General Linear group. O = Orthogonal group.

Übung 5.7

● ○ ○ Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

a) $U_1 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 3x_3 \right\}$
b) $U_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = -x_2,\; x_3 = 7 \right\}$
c) $U_3 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - 4x_3 = 0,\; x_1 = x_2 \right\}$
d) $U_4 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_3 \right\}$
e) $U_5 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 > x_2 > x_3 \right\}$
f) $U_6 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_i \in \mathbb{Q} \right\}$
g) $U_7 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$

Lösung

a) **Ja.** U_1 erfüllt alle drei Eigenschaften eines Unterraumes:

- Beweis von **(UR0)**: Die Komponenten des Nullvektors $\boldsymbol{0} = [0, 0, 0]^T$ erfüllen die Bedingung $x_1 + 2x_2 = 3x_3$, d. h. $\boldsymbol{0} \in U_1$. ✓
- Beweis von **(UR1)**: Es seien nun $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in U_1 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}$.
  Damit $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U_1$, muss $(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = 3(x_3 + y_3)$ gelten. Ist dies der Fall? Da $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ ist

$$(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = \underbrace{(x_1 + 2x_2)}_{=3x_3} + \underbrace{(y_1 + 2y_2)}_{=3y_3} = 3x_3 + 3y_3 = 3(x_3 + y_3).$$

  Somit $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$. ✓
- Beweis von **(UR2)**: Es seien $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in U_1$ und $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$. Da $\boldsymbol{x} \in U$, gilt:

$$x_1 + 2x_2 = 3x_3 \;\Rightarrow\; (\alpha\, x_1) + 2(\alpha\, x_2) = \alpha\, \underbrace{(x_1 + 2x_2)}_{=3x_3} = \alpha\,(3x_3) = 3(\alpha\, x_3)$$

  d. h. $\alpha\,\boldsymbol{x} \in U_1$. ✓

Alle 3 Unterraumaxiome sind erfüllt.

b) **Nein.** Der Nullvektor ist nicht in U_2 enthalten ($0 = 7$ ist falsch).

c) **Ja.** U_3 erfüllt alle Eigenschaften (Axiome) eines Unterraumes, konkret:

- Beweis von **(UR0)**: Die Komponenten des Nullvektors erfüllen die beiden Bedingungen $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$ und $x_1 = x_2$. Somit $\boldsymbol{0} \in U_3$. ✓
- Beweis von **(UR1)**: Es seien nun $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in U_3$. Damit $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U_3$, muss $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3) = 0$ und $(x_1 + y_1) = (x_2 + y_2)$ gelten. Ist dies der Fall? Da $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ in U_3 enthalten sind, gilt für ihre Komponenten $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$, $x_1 = x_2$ beziehungsweise $y_1 + y_2 - 4y_3 = 0$, $y_1 = y_2$. Daraus folgt

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - 4(x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 - 4x_3) + (y_1 + y_2 - 4y_3) = 0 + 0 = 0$$

und

$$(x_1 + y_1) = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = (x_2 + y_2).$$

Somit $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U_3$. ✓

- Beweis von **(UR2)**: Ferner sei $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in U_3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Vektor $\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ erfüllt dann beide Bedingungen von U_3:

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha x_1 + \alpha x_2 - 4\alpha x_3 = \alpha(x_1 + x_2 - 4x_3) = \alpha \cdot 0 = 0$$
$$x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; (\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha y_1 = (\alpha y_1),$$

woraus folgt $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in U_3$. ✓

Alle 3 Unterraumaxiome sind erfüllt.

d) **Ja.** In diesem Fall überprüfen wir (UR0) und die kompakte Bedingung (UR):

- Beweis von **(UR0)**: Der Nullvektor $\boldsymbol{0} = [0, 0, 0]^T$ ist in U_4 enthalten, weil trivialerweise alle Komponenten von $\boldsymbol{0}$ gleich sind. ✓
- Beweis von **(UR)**: Es seien $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix} \in U_4$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \alpha\, x \\ \alpha\, x \\ \alpha\, x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\, x + y \\ \alpha\, x + y \\ \alpha\, x + y \end{bmatrix}.$$

Da die drei Komponenten von $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ alle gleich sind, gehört $\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ zu U_4 ✓

e) **Nein.** Der Nullvektor ist nicht in U_5 enthalten, weil die Aussage $0 > 0 > 0$ falsch ist.

f) **Nein.** Bedingung (UR2) ist nicht erfüllt. Wählen wir zum Beispiel $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$, so gilt für $\boldsymbol{x} \in U_6$,

$$\alpha\, \boldsymbol{x} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\, x_1 \\ \sqrt{2}\, x_2 \\ \sqrt{2}\, x_3 \end{bmatrix} \notin U_6$$

weil $\sqrt{2}\, x_1, \sqrt{2}\, x_2, \sqrt{2}\, x_3 \notin \mathbb{Q}$.

g) **Nein.** Der Nullvektor ist nicht in U_7 enthalten ($0 = 1$ ist falsch). ■