Die Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ sind diejenigen Vektoren, welche bei der Multiplikation mit $\boldsymbol{A}$ in einen Vektor der gleichen Richtung transformiert werden, d. h., $\boldsymbol{Av}$ ist ein Vielfaches (λ-faches) von $\boldsymbol{v}$. Ist der Eigenwert λ negativ, so erzeugt $\boldsymbol{Av}$ eine Richtungsumkehr. Veranschaulicht ist der Vektor $\boldsymbol{u}$ in ◻ Abb. 9.1 kein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$, während der Vektor $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor ist. Im zweiten Fall sind alle Vielfache von $\boldsymbol{v}$ Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.

▶ Beispiel

Es sei $\boldsymbol{A}$ eine **Streckung** um den Streckungsfaktor $\alpha > 0$. Dann ist jeder Vektor ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert α. ◀

▶ Beispiel

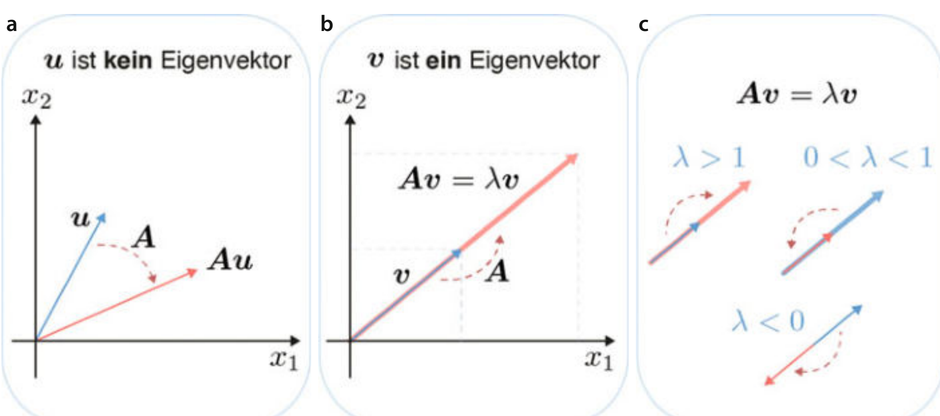
Es sei $\boldsymbol{A}$ die **orthogonale Projektion** auf eine Gerade oder eine Ebene (vgl. Übung 9.7). Dann gilt

- Alle Vektoren auf der Projektionsgerade/Projektionsebene werden auf sich selbst abgebildet. Dies sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert 1.
- Alle Vektoren senkrecht zur Projektionsgerade/Projektionsebene werden auf Null abgebildet. Dies sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert 0. ◀

▶ Beispiel

Es sei $\boldsymbol{A}$ die **Spiegelung** an einer Geraden oder einer Ebene (vgl. Übung 9.7). Dann gilt

- Alle Vektoren auf der Spiegelungsgerade/Spiegelungsebene werden auf sich selbst abgebildet. Dies sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert 1.



◻ **Abb. 9.1** Geometrische Interpretation der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $\boldsymbol{A}$

- Alle Vektoren $\boldsymbol{v}$ senkrecht zur Spiegelungsgerade/Spiegelungsebene werden auf $-\boldsymbol{v}$ abgebildet. Dies sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert -1. ◄

9.1.4 Spektrum und Spektralradius

► **Definition 9.3**

- Die Menge aller Eigenwerte von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt das **Spektrum** von $\boldsymbol{A}$, kurz $\sigma(\boldsymbol{A})$:

$$\sigma(\boldsymbol{A}) := \{\lambda \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } \boldsymbol{A}\} = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}. \tag{9.3}$$

- Der **Spektralradius** von $\boldsymbol{A}$ (notiert mit $\rho(\boldsymbol{A})$) ist der Betrag des größten Eigenwertes von $\boldsymbol{A}$:

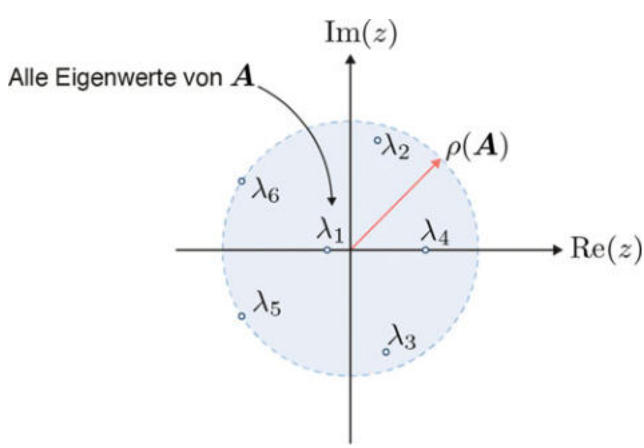
$$\rho(\boldsymbol{A}) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})\} = \max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_k|\}. \tag{9.4}$$

◄

Für komplexe Matrizen hat der Spektralradius die folgende geometrische Interpretation: Ein Kreis in der komplexen Ebene mit Radius $\rho(\boldsymbol{A})$ um 0 enthält alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ (vgl. Übung 9.23) (◘ Abb. 9.2).

Übung 9.1

∘∘∘ Man zeige, dass $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ sind. Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte?



◘ **Abb. 9.2** Spektrum und Spektralradius einer Matrix $\boldsymbol{A}$

Lösung

Laut Definition müssen wir einfach zeigen, dass für diese Vektoren $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ gilt (λ ist zu bestimmen):

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\,\boldsymbol{v}_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_1 \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2,}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\,\boldsymbol{v}_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_2 \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert -2,}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_3 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}_3 \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.}$$

■

Übung 9.3

• ∘ ∘ Die reelle (2×2)-Matrix $\boldsymbol{A}$ besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wie lautet die Matrix $\boldsymbol{A}$ konkret?

Lösung

Es seien a, b, c, d die Einträge der gesuchten Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, d. h. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ist $\boldsymbol{v_1}$ Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert 1, so gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ c + 2d \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ist $\boldsymbol{v_2}$ Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert -2, so gilt:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = -2\,\boldsymbol{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b \\ 2c + d \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich somit folgendes LGS für a, b, c, d:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ c + 2d = 2 \\ 2a + b = -4 \\ 2c + d = -2 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

welches wir mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{(Z_3) \leftrightarrow (Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2) - 2(Z_1) \\ (Z_4) - 2(Z_3)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{-(Z_2)/3 \\ -(Z_4)/3}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

Bemerkung

Die Isomorphie von $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ haben wir im ► Kap. 8 gezeigt.

9.2.2 Bestimmung von Eigenwerten – das charakteristische Polynom

Im letzten Abschnitt haben wir die Bestimmung des Eigenraumes $\mathrm{Eig}_\lambda(\boldsymbol{A})$ auf die Lösung des folgenden homogenen LGS reduziert:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{9.10}$$

Bemerkung

Erinnerung: Aus ▶ Abschn. 2.3.4 wissen wir, dass es 2 Möglichkeiten für die Lösung eines homogenen LGS gibt:

- Ist $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) \neq 0$, so hat $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = 0$ **nur die triviale Lösung** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$;
- Ist $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$, so hat $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = 0$ **unendlich viele nichttriviale Lösungen** $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.

Da der Nullvektor $\boldsymbol{0} \in \mathbb{K}^n$ kein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ ist, interessieren wir uns nur für den zweiten Fall, d. h. wenn $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ eine **nichttriviale** Lösung $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ hat. Dies impliziert

$$\boxed{\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = 0} \tag{9.11}$$

Merkregel

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ besitzt Eigenvektoren nur zu denjenigen $\lambda \in \mathbb{K}$, welche $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = 0$ erfüllen.

Der Ausdruck $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})$ ist ein **Polynom vom Grad n** in der Variablen λ und wird ***charakteristisches Polynom*** von $\boldsymbol{A}$ benannt. Die Nullstellen des charakteristisches Polynoms sind genau die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$. Wir haben somit den folgenden Satz motiviert:

▶ Satz 9.2

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind genau die in $\mathbb{K}$ liegenden **Nullstellen des charakteristischen Polynoms**

$$\boxed{p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})} \tag{9.12}$$

Gl. (9.12) heißt die **charakteristische Gleichung**. ◀

Da ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, erhalten wir direkt aus dem obigen Satz 9.2 das folgende Resultat:

▶ Satz 9.3

Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hat **höchstens n Eigenwerte** (mit entsprechender Vielfachheit gezählt). ◀

Für komplexwertige Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt der **Fundamentalsatz der Algebra** (vgl. Anhang C.3): Jedes Polynom vom Grad n über $\mathbb{C}$ zerfällt in Linearfaktoren, d. h., es hat n Nullstellen. Daraus folgt unmittelbar:

► **Satz 9.4**

Jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt **immer** n Eigenwerte in $\mathbb{C}$ (mit entsprechender Vielfachheit gezählt). ◄

Algebraische Vielfachheit (oder Multiplizität)

Nullstellen in $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ können – wie immer bei Nullstellen von Polynomen – mehrfach auftreten. Nur verschiedene Nullstellen liefern verschiedene Eigenwerte. Was ist damit gemeint? Die Gleichung

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0 \tag{9.13}$$

hat beispielsweise zwei unterschiedliche Nullstellen 1 und 5. Wenn man diese Gleichung so aufschreibt

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \tag{9.14}$$

dann wird deutlich, dass 1 jeweils die Nullstelle von zwei Linearfaktoren ist. Man sagt, dass 1 eine **zweifache** Nullstelle ist, bzw., dass 1 die **Vielfachheit** 2 hat. Im Allgemeinen können wir die charakteristische Gl. (9.12) auf zwei äquivalenten Arten festlegen

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0 \tag{9.15}$$

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = 0. \tag{9.16}$$

In Gl. (9.15) werden alle n Eigenwerte explizit aufgeschrieben; ein bestimmtes λ_i kann daher die Nullstelle von mehreren Linearfaktoren sein. In Gl. (9.16) werden nur die **unterschiedlichen** Eigenwerte aufgeschrieben; die Potenz m_i ist die Vielfachheit der Nullstelle λ_i in $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$. Aus diesem Grund definiert man:

► **Definition 9.5 (Algebraische Vielfachheit)**

Die Vielfachheit der Nullstelle λ in $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ nennt man die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ. ◄

Zusammenhang der Vielfachheitsbegriffe

Für jeden Eigenwert λ unterscheidet man zwei Vielfachheitsbegriffe:

- Die **geometrische Vielfachheit** von λ ist die Dimension des Eigenraumes $\mathrm{Eig}_\lambda(\boldsymbol{A})$.
- Die **algebraische Vielfachheit** von λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ (d. h. wie viel Mal λ als Nullstelle von $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ auftritt).

Zwischen den beiden Vielfachheitsbegriffe gilt der folgende Zusammenhang und wichtige Satz:

9.2.3 Kochrezept

Kochrezept 9.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben: eine $(n \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Gesucht: die Eigenwerte und Eigenvektoren/Eigenräume von $\boldsymbol{A}$.

Schritt 1: Bilde das **charakteristische Polynom** von $\boldsymbol{A}$

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad n in λ. Für (2×2)-Matrizen kann man die Formel von Vieta benutzen, um $p_A(\lambda)$ schnell zu bestimmen (Trick # 9.1):

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \det(\boldsymbol{A}).$$

Schritt 2: Die gesuchten Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind die **Nullstellen des charakteristischen Polynoms** $p_A(\lambda)$.

Schritt 3: Um die Eigenvektoren/Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten zu bestimmen, löse man jeweils das LGS $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus. Diese Prozedur führt man mit allen im Schritt 2 bestimmten Eigenwerte separat durch.

9.2.4 Weitere nützliche Eigenschaften und Tricks

Wir halten in der Folge einige interessante und praktische Tatsachen fest, die bei der Eigenwertsuche sehr nützlich sind.

Trick # 9.1 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist $p_A(\lambda)$ ein **Polynom vom Grad n**, d. h.*

$$p_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0. \tag{9.18}$$

*Dies folgt direkt aus der Definition der Determinante (vgl. Übung 9.33). Für einige Koeffizienten von $p_A(\lambda)$ gelten die **Formeln von Vieta** (die Formeln für die anderen Koeffizienten sind etwas komplexer und werden in diesem Buch nicht behandelt, da sie kaum prüfungsrelevant sind):*

$$\boxed{a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Spur}(A), \quad a_0 = \det(A)} \tag{9.19}$$

Insbesondere ist das charakteristische Polynom einer (2×2)-Matrix gleich:

$$\boxed{p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(A)\,\lambda + \det(A)} \tag{9.20}$$

▶ **Beispiel**

» *Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ erfüllt $\mathrm{Spur}(A) = 2$ und $\det(A) = -3$. Daher ist das charakteristische Polynom von A gleich $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Spur(A)\,\lambda + \det(A) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.* ◀

Trick # 9.2 *Die **Summe der n Eigenwerte** (mit Vielfachheit gezählt) ist gleich der Spur von A (vgl. Übung 9.27):*

$$\boxed{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Spur}(A)} \tag{9.21}$$

▶ **Beispiel**

» *Die Matrix $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -2$ (mit algebraischer Vielfachheit 2) und $\lambda_3 = 4$. Die Spur von A ist $\mathrm{Spur}(A) = -3 + 5 - 2 = 0$ und stimmt mit der Summe der Eigenwerte überein $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 - 2 + 4 = 0$ ✓. Beachte: Der Eigenwert -2 hat algebraische Vielfachheit 2 und wird somit zwei Mal in der Summe mitgezählt.* ◀

Bemerkung

Trick 9.2 ist eine schnelle **Kontrollmöglichkeit**, ob wir die Eigenwerte richtig berechnet haben.

Trick # 9.3 *Das **Produkt der n Eigenwerte** von A ist gleich der Determinante von A (vgl. Übung 9.27):*

$$\boxed{\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(A)} \tag{9.22}$$

Musterbeispiel 9.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen)

Als Beispiel berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Schritt 1: Wir berechnen das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Alternative: Mit der Formel von Vieta (Trick # 9.1) finden wir ($\mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}) = 4$, $\det(\boldsymbol{A}) = 3$) :

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \det(\boldsymbol{A}) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Schritt 2: Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1.$$

Da jede Nullstelle von p_A nur einmal vorkommt, haben beide Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1.

Kontrolle: $\lambda_1 + \lambda_2 = 3 + 1 = \mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}) = 2 + 2 = 4$ ✓

Schritt 3: Wir bestimmen die zugehörigen Eigenvektoren/Eigenräume. Wir betrachten die verschiedenen Eigenwerte separat.

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$: Wir lösen das LGS $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)+(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_3(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Insbesondere ist $\dim(\mathrm{Eig}_3(\boldsymbol{A})) = 1$. Somit hat der Eigenwert $\lambda_1 = 3$ die geometrische Vielfachheit 1.

- Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$. In diesem Fall lösen wir das LGS $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2-1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)-(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A})) = 1$ hat der Eigenwert $\lambda_2 = 1$ die geometrische Vielfachheit 1.

Bemerkung

Der erste Eigenvektor-Repräsentant, den wir in Musterbeispiel 9.1 berechnet haben, war $[1, 1]^T$, aber das ist nur ein Punkt auf der Eigenvektorlinie (Eigenraum). Der Eigenraum zum ersten Eigenwert ist somit eine Gerade mit Steigung 1. Der erste Eigenwert war 3. Somit wird jeder Vektor entlang der Eigenvektorlinie um Faktor 3 verlängert, wenn er unter $\boldsymbol{A}$ transformiert wird. Der zweite Eigenvektor-Repräsentant, den wir berechnet haben, war $[-1, 1]^T$. Daher ist der Eigenraum zum zweiten Eigenwert eine Gerade mit Steigung -1. Der Eigenwert ist 1, sodass sich die Punkte entlang der zweiten Eigenvektorlinie bei der Transformation durch $\boldsymbol{A}$ überhaupt nicht bewegen (Abb. 9.3).

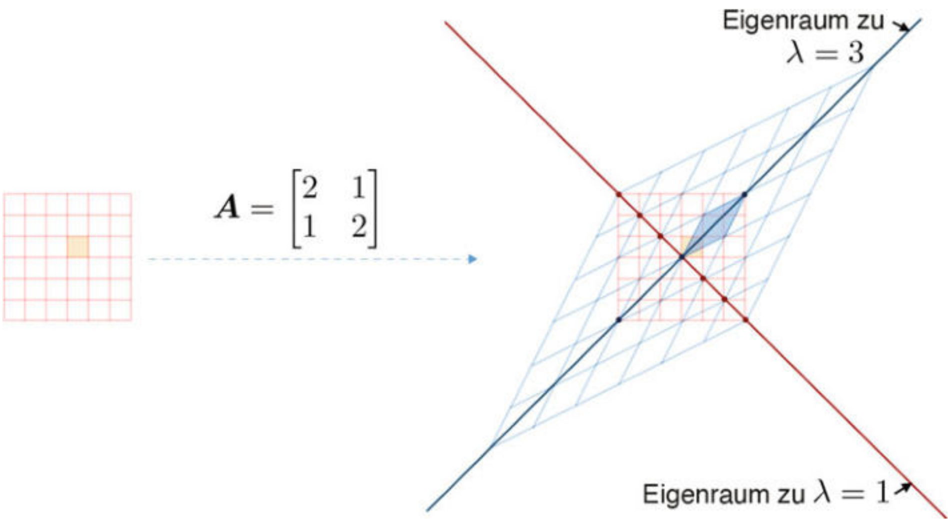


Abb. 9.3 Musterbeispiel 9.1

Übung 9.17

• • ∘ 2 schwarze Punkte Man bestimme alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen über $\mathbb{K}$:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

f) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

g) $\begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Lösung

In allen Beispielen gehen wir nach dem Kochrezept 9.1 vor. Es ist den Lesern überlassen, mit welchen Methoden sie im Folgenden die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume bestimmt (Sarrus, Laplace-Entwicklung, Gauß-Algorithmus, und Spezial-Methoden/Tricks aus diesem Kapitel).

a) **Schritt 1:** Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Schritt 2: Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind die Nullstellen von $p_A(\lambda)$, d. h.[1]

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$

Da λ_1 und λ_2 einfache Nullstellen von $p_A(\lambda)$ sind, haben beide Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1.

Schnellvariante: Weil $\boldsymbol{A}$ eine Dreiecksmatrix ist, sind die Diagonalelemente $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ schon die gesuchten Eigenwerte (Trick # 9.4).

Schritt 3: Um die Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten zu bestimmen, lösen wir jeweils das LGS $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Wir betrachten die verschiedenen Eigenwerte separat.

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)+2(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Es gilt $\dim(\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A})) = 1$, d. h. $\lambda_1 = 1$ hat geometrische Vielfachheit 1.

- Eigenraum zu $\lambda_2 = -1$: Für den zweiten Eigenwert lösen wir $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+1 & 1 & 0 \\ 0 & -1+1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_{-1}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}_{-1}(\boldsymbol{A})) = 1$ hat $\lambda_2 = -1$ geometrische Vielfachheit 1.

1 Als Kontrolle überprüfen wir, dass die Summe der gefundenen Eigenwerte gleich der Spur von $\boldsymbol{A}$ ist (Trick # 9.2): $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - 1 = 0 = \mathrm{Spur}(\boldsymbol{A})$. ✓

b) **Schritt 1:** Das charakteristische Polynom ist:

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 3$$
$$= \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 2)(\lambda - 6).$$

Alternative: Mit der Formel von Vieta (Trick # 9.1) finden wir ($\mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}) = 8$, $\det(\boldsymbol{A}) = 12$):

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Spur}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \det(\boldsymbol{A}) = \lambda^2 - 8\lambda + 12.$$

Schritt 2: Die Nullstellen von $p_A(\lambda)$ sind die gesuchten Eigenwerte

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 6) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6.$$

Beide Nullstellen sind einfach, d. h., λ_1 und λ_2 haben algebraische Vielfachheit 1.
Schritt 3:

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 2$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-2 & 3 & 0 \\ 1 & 3-2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{3(Z_2)-(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_2(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}_2(\boldsymbol{A})) = 1$ hat $\lambda_1 = 2$ geometrische Vielfachheit 1.

- Eigenraum zu $\lambda_2 = 6$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-6 & 3 & 0 \\ 1 & 3-6 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)+(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_6(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\lambda_2 = 6$ hat geometrische Vielfachheit 1, weil $\dim(\mathrm{Eig}_6(\boldsymbol{A})) = 1$.

c) **Schritt 1:** Wir bestimmen das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}$

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) + 6 = \lambda^2 + 5$$

Schritt 2: Die Eigenwerte sind die in $\mathbb{K}$ liegenden Nullstellen von $p_A(\lambda)$.

- Weil das charakteristische Polynom **keine reelle Nullstellen** hat, hat die Matrix $\boldsymbol{A}$ **keine Eigenwerte in** $\mathbb{R}$.
- Über $\mathbb{C}$ zerfällt $p_A(\lambda)$ in Linearfaktoren (dies ist immer der Fall, wegen des Fundamentalsatzes der Algebra). Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ über $\mathbb{C}$ lauten:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 5 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{5}$$

und sie haben algebraische Vielfachheit 1.

Schritt 3:

- Eigenraum zu $\lambda_1 = i\sqrt{5}$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - i\sqrt{5}\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1-i\sqrt{5} & 2 & 0 \\ -3 & 1-i\sqrt{5} & 0 \end{array}\right] \overset{(1+i\sqrt{5})(Z_2)-3(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -(1+i\sqrt{5}) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_{i\sqrt{5}}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+i\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+i\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Es gilt $\dim(\mathrm{Eig}_{i\sqrt{5}}(\boldsymbol{A})) = 1$ (als komplexer Unterraum!). Somit ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = i\sqrt{5}$ gleich 1.

- Eigenraum zu $\lambda_2 = -i\sqrt{5}$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} + i\sqrt{5}\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1+i\sqrt{5} & 2 & 0 \\ -3 & 1+i\sqrt{5} & 0 \end{array}\right] \overset{(1-i\sqrt{5})(Z_2)-3(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1+i\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_{-i\sqrt{5}}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Wegen $\dim(\mathrm{Eig}_{-i\sqrt{5}}(\boldsymbol{A})) = 1$ hat $\lambda_2 = -i\sqrt{5}$ geometrische Vielfachheit 1.

d) **Schritt 1+2:** Da $\boldsymbol{A}$ eine Dreiecksmatrix ist sind die Diagonalelemente $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 4$ bereits die gesuchten Eigenwerte (Trick # 9.4). Alle Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1.

Schritt 3: Für jeden Eigenwert lösen wir jeweils $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ mit dem Gauß-Algorithmus.

- Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_2)-(Z_1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{2(Z_3)+3(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

und $\dim(\mathrm{Eig}_1(\boldsymbol{A})) = 1$, d. h. $\lambda_1 = 1$ hat geometrische Vielfachheit 1.

- Eigenraum zu $\lambda_2 = 3$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_3)-(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_3(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 3$ ist 1.

- Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_4(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_3 = 4$ ist 1.

e) **Schritt 1:** Das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}$ ist:

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{=(1-\lambda)(1-\lambda)-1} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{=(1-\lambda)-1=-\lambda} + 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}}_{=1-(1-\lambda)=\lambda} = -\lambda^2(\lambda-3).$$

Schritt 2: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $p_A(\lambda)$, d. h.

$$p_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-3) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)},\ \lambda_3 = 3.$$

In diesem Fall ist 0 eine doppelte Nullstelle. Somit hat der Eigenwert 0 algebraische Vielfachheit 2. Die algebraische Vielfachheit von $\lambda_3 = 3$ ist 1.

Elegante Alternative: Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ kann man auch mittels Tricks bestimmen. Jede Zeilensumme ergibt 3. Somit ist 3 ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ (Trick # 9.6). Weiterhin ist die Determinante von $\boldsymbol{A}$ Null, d. h., 0 ist ein weiterer Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ (Trick # 9.3). Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Spur von $\boldsymbol{A}$ (Trick # 9.2). Wegen $\text{Spur}(\boldsymbol{A}) = 3$ muss der letzte Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ auch gleich 0 sein, damit die Gesamtsumme aller Eigenwerte gleich 3 wird.

Zweite Alternative: Alle Zeilen von $\boldsymbol{A}$ sind identisch und $\text{Spur}(\boldsymbol{A}) = 3 \neq 0$. Daher sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ gleich $\lambda_{1,2} = 0$ (algebraische Vielfachheit 2) und $\lambda_3 = 3$ (Trick # 9.7).

Schritt 3:

- Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = 0$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 0\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-(Z_1) \\ (Z_3)-(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\text{Eig}_0(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Die Dimension von $\text{Eig}_0(\boldsymbol{A})$ ist 2. Also hat 0 die geometrische Vielfachheit 2, gleich wie die algebraische Vielfachheit.

- Eigenraum zu $\lambda_3 = 3$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{2(Z_2)+(Z_1) \\ 2(Z_3)+(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(Z_3)+(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\text{Eig}_3(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\dim(\text{Eig}_3(\boldsymbol{A})) = 1$, d. h. 3 hat die geometrische Vielfachheit 1.

f) **Schritt 1:** Das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{A}$ ist:

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2.$$

Schritt 2: Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d. h.

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2 \text{ (doppelte Nullstelle)}, \ \lambda_3 = 4.$$

Der Eigenwert -2 hat die algebraische Vielfachheit 2 (doppelte Nullstelle), während $\lambda_3 = 4$ die algebraische Vielfachheit 1 hat.

Schritt 3:

- Eigenraum zu $\lambda_{1,2} = -2$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3+2 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5+2 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -2+2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-7(Z_1) \\ (Z_3)-6(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{(Z_3)-(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_{-2}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Es gilt $\dim(\mathrm{Eig}_{-2}(\boldsymbol{A})) = 1$, d. h. der Eigenwert -2 hat die geometrische Vielfachheit 1. In diesem Fall ist die geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische Vielfachheit (vgl. Satz 9.5).[2]

- Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$: Wir lösen $(\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3-4 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 5-4 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -2-4 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-(Z_1) \\ (Z_3)-6(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -7 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Lösung ist:

$$\mathrm{Eig}_{4}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_3 = 4$ ist 1.

---

2 Konsequenz: Die Matrix ist nicht diagonalisierbar (vgl. Prügungstraining Lineare Algebra, Band II).