In diesem Kapitel wird umfangsreiches Übungsmaterial zum Eintrainieren des erworbenen Wissens zur Verfügung gestellt. Es beinhaltet 150 (ohne sich) Multiple-Choice-Fragen sowie 4 Musterprüfungen mit steigendem Schwierigkeitsgrad. Detaillierte Lösungen zu allen Aufgaben und Prüfungen finden Sie unten im Lösungsteil.

10.1 Multiple-Choice-Fragen

In diesem Teil befinden sich 150 Multiple-Choice-Fragen, welche perfekt zum Überprüfen des Linearen-Algebra-Basiswissens passen. Der Schwierigkeitsgrad der Fragen variiert bewusst von einfach bis schwierig. Beachten Sie: Es können jeweils eine, zwei oder mehrere Antworten richtig sein.

▶ Kapitel 1

1 ○ ○ ○ Es seien $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$. Welche Produkte existieren?

(A) $\boldsymbol{A}^2$ (B) $\boldsymbol{AB}$ (C) $\boldsymbol{BA}$ (D) $\boldsymbol{AC}$ (E) $\boldsymbol{BC}$ (F) $\boldsymbol{CA}$

2 ○ ○ ○ Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{p\times m}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Welche Größe hat die Matrix $\boldsymbol{ABC}$?

(A) $n \times m$ (B) $n \times n$ (C) nicht definiert

3 ○ ○ ○ Welche Operationen extrahieren die zweite Zeile aus der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$?

(A) Linksmultiplikation mit $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B) Linksmultiplikation mit $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(C) Rechtsmultiplikation mit $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(D) Rechtsmultiplikation mit $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4 ○ ○ ○ Die Inverse der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ist

(A) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (C) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

5 ○ ○ ○ Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist ...

(A) eine obere Dreiecksmatrix
(B) eine untere Dreiecksmatrix
(C) eine Diagonalmatrix
(D) eine quadratische Matrix

6 ○ ○ ○ Die Adjungierte $\boldsymbol{A}^*$ der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$ ist

(A) $\begin{bmatrix} -i & 1-i \\ 1+i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} i & 1-i & 1 \\ 1+i & 1 & -i \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} -i & 1+i & 1 \\ 1-i & 1 & i \end{bmatrix}$

7 ● ○ ○ Welche der folgenden reellen Matrizen sind normal?

(A) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

8 ○ ○ ○ Für die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} i & 1 & 3 \\ 1 & 1+i & 1 \\ 2+i & 3i & 1-6i \end{bmatrix}$ gilt

(A) $\mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}^*) = 2 - 4i$
(B) $\mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}^*) = 2 + 4i$
(C) $\mathrm{Spur}(\boldsymbol{A}^*) = 6 + 2i$

9 ○ ○ ○ Für beliebige Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$.

(A) Immer wahr
(B) Immer falsch
(C) Wahr für $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{0}$

10 ○ ○ ○ Für beliebige Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

(A) Wahr
(B) Falsch

11 ● ○ ○ Für invertierbare Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ berechne man $\boldsymbol{C}^T \left(\boldsymbol{AB}^{-1}\boldsymbol{C}^T\right)^{-1} \boldsymbol{AB}^{-1}$.

(A) $\boldsymbol{0}$
(B) $\boldsymbol{E}$
(C) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BC}^{-T}\boldsymbol{AB}^{-1}$

12 ● ○ ○ Für invertierbare Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ löse man die Matrizengleichung $5\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{C} = \left(2\boldsymbol{DA}^T + \boldsymbol{E}\right)^T$ nach $\boldsymbol{A}$ auf.

(A) $\boldsymbol{A} = \left(5\boldsymbol{E} + 4\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{D}^T\right)^{-1}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{C})$
(B) $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{C})\left(5\boldsymbol{E} + 4\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{D}^T\right)^{-1}$

60 $\bullet\bullet\circ$ Die Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ hat nur die Einträge ±1. Dann ist $\det(\boldsymbol{A}) \leq 6$.

(A) Wahr (B) Falsch

▶ Kapitel 4

61 $\circ\circ\circ$ Die obere Dreiecksmatrix bei der LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{bmatrix}$ ist ...

(A) $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 0&1&-1\\ 0&0&-1 \end{bmatrix}$ (B) $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 0&-1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ (C) $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 0&-1&0\\ 0&0&-1 \end{bmatrix}$

62 $\bullet\circ\circ$ Die Matrix $\boldsymbol{P}$ bei der LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3&1&0&-1\\ 2&1&1&0\\ 2&1&0&1\\ 1&2&3&1 \end{bmatrix}$ ist ...

(A) $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$ (B) $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}$ (C) $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix}$

63 $\bullet\circ\circ$ Es sei $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LR}$ die LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1&1\\ 2&1\\ 3&1\\ 4&1\\ 5&1 \end{bmatrix}$. Welche Aussagen sind richtig?

(A) $\boldsymbol{A}$ hat keine LR-Zerlegung
(B) $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{2\times5}$
(C) $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{5\times2}$
(D) $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{5\times5}$
(E) $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{2\times2}$
(F) $\det(\boldsymbol{R}) = -1$

64 $\bullet\bullet\circ$ Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0&1\\ 0&0 \end{bmatrix}$ besitzt eine eindeutige LR-Zerlegung.

(A) Wahr (B) Falsch

65 $\bullet\bullet\circ$ Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0&1\\ 1&0 \end{bmatrix}$

(A) $\boldsymbol{A}$ besitzt eine LR-Zerlegung
(B) $\boldsymbol{A}$ besitzt eine LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung
(C) $\boldsymbol{A}$ besitzt keine LR-Zerlegung
(D) $\boldsymbol{A}$ besitzt keine LR-Zerlegung mit Zeilenvertauschung

101 ● ○ ○ Gegeben sind die Unterräume $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ und $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$. Dann ist $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

(A) Wahr (B) Falsch

102 ●○○ Man bestimme eine Basis des folgenden Unterraums $W = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\}$.

(A) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(B) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

▶ Kapitel 7 und 8

103 ● ○ ○ Für welche Vektoren $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt die Matrix $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ eine Projektion?

(A) Für alle $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$

(B) Für $||\boldsymbol{u}|| = 1$ oder $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

(C) Für $||\boldsymbol{u}|| = 1$

(D) Für $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u} = 1$ oder $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

104 ○ ○ ○ Es sei $F : V \to W$ linear. Die Dimension des Kernes von F ist 3 und die Dimension des Bildes von F ist 4. Welche Aussagen sind richtig?

(A) $\dim(W) = 7$

(B) Jede Basis von V besteht aus 7 Vektoren

(C) $\dim(V) = 7$

(D) Gilt $\dim(W) = 4$, so ist F surjektiv

(E) F ist injektiv

105 ○ ○ ○ Gegeben ist die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1-x_2-x_3 \\ 2x_1+2x_3 \\ x_2+x_3 \end{bmatrix}$. Man berechne die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis.

(A) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

106 ● ○ ○ Gegeben ist die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ mit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Man berechne die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(A) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\boldsymbol{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

131 ● ● ○ Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ äquivalent zu $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

(A) $k = 0$ (B) $k = 1$ (C) $k = -1$ (D) $k \in \mathbb{R}$

132 ● ● ○ Die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ sind ähnlich.

(A) Wahr (B) Falsch

133 ● ● ○ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind ähnlich. Dann ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

(A) Wahr (B) Falsch

134 ● ● ○ Die reellen Vektorräume $P_7(\mathbb{R})$ und $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ sind isomorph.

(A) Wahr (B) Falsch

▶ Kapitel 9

135 ○ ○ ○ Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$?

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

136 ○ ○ ○ Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ hat den Eigenwert 1. Wie lautet der andere Eigenwert?

(A) 0 (B) 3 (C) 2 (D) -2

137 ○ ○ ○ Die Eigenwerte einer reellen Matrix sind immer reell.

(A) Wahr (B) Falsch

138 ● ○ ○ Das Spektrum der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist ...

(A) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{-1, -1, 3\}$ (B) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, -1, 3\}$ (C) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 2, 3\}$

131 ● ● ○ Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ äquivalent zu $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

(A) $k = 0$ (B) $k = 1$ (C) $k = -1$ (D) $k \in \mathbb{R}$

132 ● ● ○ Die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ sind ähnlich.

(A) Wahr (B) Falsch

133 ● ● ○ $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind ähnlich. Dann ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

(A) Wahr (B) Falsch

134 ● ● ○ Die reellen Vektorräume $P_7(\mathbb{R})$ und $\mathbb{C}^{2\times 2}$ sind isomorph.

(A) Wahr (B) Falsch

▶ Kapitel 9

135 ○ ○ ○ Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$?

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

136 ○ ○ ○ Die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ hat den Eigenwert 1. Wie lautet der andere Eigenwert?

(A) 0 (B) 3 (C) 2 (D) -2

137 ○ ○ ○ Die Eigenwerte einer reellen Matrix sind immer reell.

(A) Wahr (B) Falsch

138 ● ○ ○ Das Spektrum der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist ...

(A) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{-1, -1, 3\}$ (B) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, -1, 3\}$ (C) $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 2, 3\}$