## 10.2 Musterprüfung 1

Schwierigkeitsgrad: ● ○ ○ ○ Zeit: 120 Minuten

| Aufgabe | Punktezahl | Erreicht |
|---|---|---|
| 1 | 24 | |
| 2 | 15 | |
| 3 | 10 | |
| 4 | 10 | |
| 5 | 10 | |
| 6 | 10 | |
| 7 | 16 | |
| 8 | 25 | |
| **Total** | **120** | |

### Aufgabe 1 (24 Punkte)

**a)** Gegeben sind die Matrizen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$. Was ist der Wert des Eintrags $c_{23}$ in der Matrix $\boldsymbol{C}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) -1

**b)** Die $(n \times n)$-Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ erfüllen die Bedingung $\boldsymbol{AB} = 2\boldsymbol{E}$. Man berechne $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{B}^{-1} = 2\boldsymbol{A}$ (C) $\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ (D) $\boldsymbol{B}^{-1} = 2\boldsymbol{E}$

**c)** Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

(A) Wahr (B) Falsch

**d)** Die Dimension des Unterraumes $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ ist

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) Keiner davon

**e)** Die $(n \times n)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ erfüllt $\det(\boldsymbol{A}) = 5$. Welche Aussagen sind korrekt?

(A) $\boldsymbol{A}$ ist singulär
(B) Die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert
(C) $\text{Rang}(\boldsymbol{A}) < n$
(D) $\text{Ker}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{0}\}$

**f)** $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear, wenn eine $(n \times m)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert mit $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(A) Wahr
(B) Falsch

**g)** Es sei $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ linear mit der Darstellungsmatrix $\boldsymbol{A}$. Welche Aussagen sind korrekt?

(A) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$
(B) $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$
(C) $\text{Rang}(\boldsymbol{A}) \le 4$

**h)** Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit charakteristischem Polynom $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^3$. Welche Aussagen sind korrekt?

(A) $\lambda = 3$ ist ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$
(B) Der Eigenwert $-2$ hat algebraische Vielfachheit 3
(C) $\lambda = 2$ ist ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}^T$
(D) Alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind reell

## Aufgabe 2 (15 Punkte)

**a)** Man betrachte die folgenden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\text{Spur}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \text{Spur}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T)$? (5 Punkte)

**b)** Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ sei symmetrisch. Man berechne $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}\right)^T (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T$. (5 Punkte)

**c)** Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Man zeige, dass $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T(\boldsymbol{A}^{-1})^T$ symmetrisch ist. (5 Punkte)

## Aufgabe 3 (10 Punkte)

**a)** Für welche $k \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} k \\ -\frac{4}{5} \\ k \end{bmatrix}$ linear unabhängig? (5 Punkte)

**b)** Man berechne die Eigenwerte von $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 8 & 15 & 2 \end{bmatrix}$. (5 Punkte)

## Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & a & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**a)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung? (3 Punkte)
**b)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung? (3 Punkte)
**c)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen? Was ist die Dimension der Lösungsmenge in diesem Fall? Man gebe eine geometrische Interpretation der Lösungsmenge. (4 Punkte)

## Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$.
**a)** Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar? (5 Punkte).
**b)** Bestimme für die im Punkt (a) gefundenen Werte von $k$ die Inverse von $\boldsymbol{A}$. (5 Punkte)

## Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_4 = 0,\ 3x_1 + x_2 = 0\}$.
**a)** Man verifiziere, dass $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. (4 Punkte)
**b)** Man bestimme eine Basis von $U$. (5 Punkte)
**c)** Man bestimme $\dim(U)$. (1 Punkt)

## Aufgabe 7 (16 Punkte)

Man betrachte die folgende lineare Abbildung

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

**a)** Man bestimme die Darstellungsmatrix von $F$ in der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. (2 Punkte)
**b)** Man bestimme eine Basis von $\mathrm{Ker}(F)$. (5 Punkte)
**c)** Man bestimme eine Basis von $\mathrm{Im}(F)$. (5 Punkte)
**d)** Ist $F$ injektiv, surjektiv, bijektiv? (2 Punkte)
**e)** Man verifiziere die Dimensionsformel für $F$. (2 Punkte)

## Aufgabe 8 (25 Punkte)

Man betrachte die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

**a)** Man beweise, dass $\lambda = 4$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ ist. (4 Punkte)

**b)** Man bestimme den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 4$. (4 Punkte)

**c)** Man zeige, dass $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenvektor? (4 Punkte

**d)** Es seien $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Man berechne $\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A}^{100} \boldsymbol{v}$. (3 Punkte)

**e)** Wie lauten die weiteren Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$? (3 Punkte)

**f)** Man bestimme alle Eigenwerte von $\left(\boldsymbol{A}^n + 2\boldsymbol{E}\right)^T$. (4 Punkte)

**g)** Ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar? Man bestimme alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}^{-1}$. (3 Punkte)