Musterbeispiel 2.1 (LGS mit genau einer eindeutigen Lösung)

Wir betrachten das folgende LGS:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Schritt 1 Als erstes ordnen wir dem Gleichungssystem die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ zu:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 & (Z_1) \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 & (Z_2) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 & (Z_3) \end{cases} \rightsquigarrow [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Schritt 2 Jetzt wenden wir den Gauß-Algorithmus an: Das Ziel ist es, die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ mittels elementarer Zeilenoperationen in die Zeilenstufenform (2.2.3) zu bringen. Durch das Vertauschen der ersten Zeile mit der zweiten Zeile und die Multiplikation der ersten Zeile mit -1 erhalten wir eine 1 als erste Ziffer, auch **Pivot** genannt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{(Z_1) \leftrightarrow -(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right].$$

Nun erzeugen wir Nullen an der ersten Position der zweiten und dritten Zeile durch $(Z_2) - 3(Z_1)$ und $(Z_3) - 2(Z_1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-3(Z_1) \\ (Z_3)-2(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ \boxed{0} & 0 & 7 & 7 \\ \boxed{0} & 3 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Dann vertauschen wir die zweite Zeile mit der dritten Zeile, damit wir zwei Nullen in der untersten Zeile erhalten

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{(Z_2) \leftrightarrow (Z_3)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right].$$

Weiter wollen wir alles Einsen auf der Hauptdiagonale erzeugen. Also dividieren wir die zweite Zeile durch 3 und die dritte durch 7:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{1}{3}(Z_2) \\ \frac{1}{7}(Z_3)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Zielmatrix $\boldsymbol{Z}$ ist jetzt eine obere Dreiecksmatrix. Der Gauß-Algorithmus hat somit sein Ziel erreicht. Die Zielmatrix $\boldsymbol{Z}$ entspricht Fall 1: Das gegebene LGS hat **genau eine Lösung**.

Schritt 3 Aus der Zielmatrix $\boldsymbol{Z}$ können wir nun die Lösung direkt ableiten:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Die eindeutige Lösung des LGS lautet somit $\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Die Lösungsmenge ist ein Punkt wo die drei Ebenen (Gleichungen) sich schneiden (Abb. 2.4).

Bemerkung
Beim Gauß-Algorithmus darf man je zwei Zeilen vertauschen, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass es keine Rolle spielt, in welcher Ordnung die einzelnen Gleichungen in einem LGS auftreten (vgl. elementare Zeilenoperationen). Zum Beispiel

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{ist dasselbe LGS wie} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Musterbeispiel 2: LGS mit unendlich vielen Lösungen

Als nächstes Musterbeispiel betrachten wir ein LGS, das unendlich viele Lösungen besitzt.

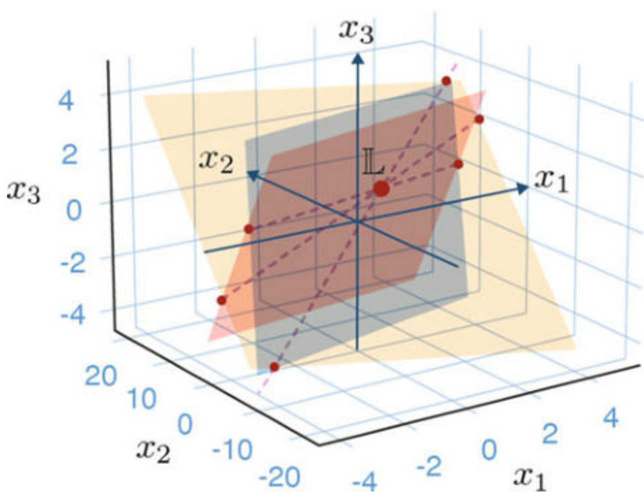

Abb. 2.4 Grafische Darstellung der Lösung von Musterbeispiel 2.1

Musterbeispiel 2.2 (LGS mit unendlich vielen Lösungen)

Wir betrachten das folgende LGS:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

Schritt 1 Wir ordnen dem LGS die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ zu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 & (Z_1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 & (Z_2) \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 & (Z_3) \end{cases} \rightsquigarrow [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

Schritt 2 Dann wenden wir den Gauß-Algorithmus an. Wir erzeugen Nullen an der ersten Position der zweiten und dritten Zeile durch $(Z_2) - 2(Z_1)$ und $(Z_3) - 4(Z_1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-2(Z_1)\\(Z_3)-4(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ \boxed{0} & -3 & 5 & -1 \\ \boxed{0} & -3 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

Nun erkennen wir, dass die letzten zwei Zeilen gleich sind. Also durch $(Z_3) - (Z_2)$ erhalten wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array}\right] \overset{(Z_3)-(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Schließlich dividieren wir die zweite Zeile durch (-3):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Zielmatrix ist vom Typ 2. Das LGS hat somit **unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter**.

Schritt 3 Herauslesen der Lösung

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Es sind 2 Gleichungen für 3 Unbekannte, x_1, x_2, x_3: Es gibt somit **unendlich viele Lösungen**, weil eine der 3 Unbekannten beliebig ist. In solchen Situationen wählt man $x_3 = t$, wobei t ein freier Parameter ist, und schreibt die anderen Variablen in Abhängigkeit von t. Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t$. Aus der ersten Gleichung folgt $x_1 = 4 - x_2 + x_3 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}t$. Die Lösung ist somit

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{x}_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\boldsymbol{v}_1},\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lösungsmenge ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ in der sich 3 Ebenen schneiden (Abb. 2.5).

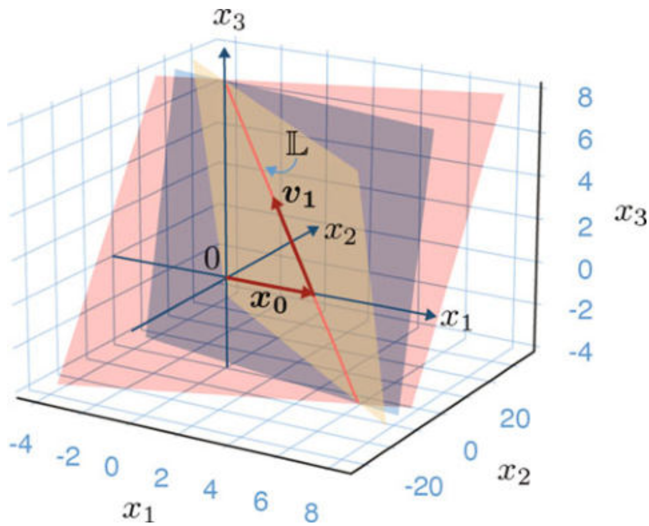

Abb. 2.5 Grafische Darstellung der Lösung von Musterbeispiel 2.2

Praxistipp

Alle Variablen direkt neben den markierten Elementen (Pivots) sind freie Variablen

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{1} & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \uparrow & \end{array}$$

$$0 \cdot x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = t \text{ freie Variable.}$$

Bemerkung

Dem aufmerksamen Leser fällt sicher auf, dass die dritte Gleichung des LGSs im Musterbeispiel 2.2 eine Linearkombination der ersten und zweiten Gleichung ist. Genauer: $(Z_3) = 2(Z_1) + (Z_2)$. Daher hat das LGS unendlich viele Lösungen mit einem freien Parameter.

Musterbeispiel 3: LGS mit keiner Lösung

Als nächstes Beispiel betrachten wir ein LGS, welches keine Lösung besitzt.

Musterbeispiel 2.3 (LGS mit keiner Lösung)

Man löse das folgende LGS mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

Schritt 1 Zunächst stellen wir die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ des LGS auf:

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 & (Z_1) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 & (Z_2) \\ 5x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & -8 & (Z_3) \end{array} \end{cases} \rightsquigarrow [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & -8 \end{array}\right].$$

Schritt 2 Wir wenden den Gauß-Algorithmus in 3 Schritten an:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & -8 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-2(Z_1) \\ (Z_3)-5(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

$$\overset{(Z_3)-2(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Die Zielmatrix ist vom Typ 3. Das LGS hat somit **keine Lösung** (die letzte Gleichung ist $0 = 3$, was unmöglich ist) (Abb. 2.6).

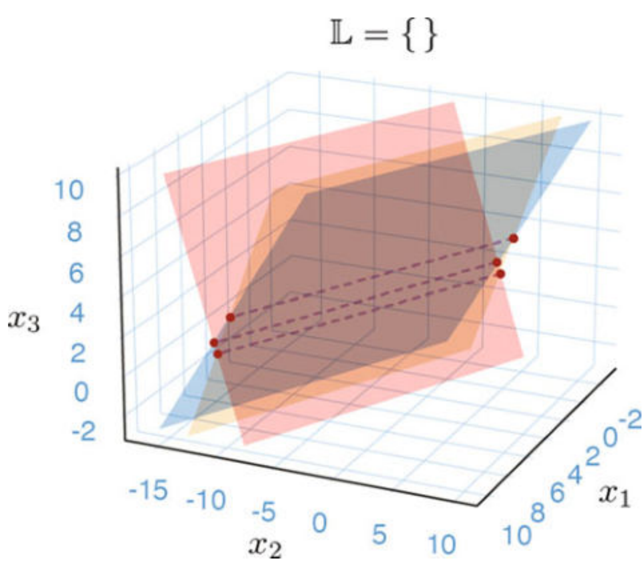

Abb. 2.6 Grafische Darstellung der Lösung von Musterbeispiel 2.3

Musterbeispiel 4: Gleichzeitige Lösung mehrerer LGS

Mit dem Gauß-Algorithmus kann man mehrere LGS mit der selben Darstellungsmatrix $\boldsymbol{A}$, aber verschiedenen Lösungsvektoren $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_r}$ gleichzeitig (simultan) lösen:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b_1}, \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b_2}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b_r}. \tag{2.12}$$

In kompakter Form kann man die verschiedenen LGS mithilfe einer einzigen erweiterten Matrix zusammenfassen:

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b_1}\cdots\boldsymbol{b_r}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{rm} \end{array}\right]. \tag{2.13}$$

Musterbeispiel 2.4 (Gleichzeitige Lösung mehrerer LGS)

Man löse die zwei folgenden LGS mit dem Gauß-Algorithmus simultan:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Schritt 1 Bei der gleichzeitigen Lösung mehreren LGS $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b_1}$ und $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b_2}$, kann man die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2}]$ aufstellen (beachte, dass es jetzt zwei Spalten nach dem vertikalen Strich | gibt):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \text{ und } -1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \text{ und } 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \text{ und } 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (Z_1) \\ (Z_2) \\ (Z_3) \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Schritt 2 Wir führen den Gauß-Algorithmus wie gehabt durch:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \overset{\substack{(Z_2)-2(Z_1) \\ (Z_3)-(Z_1)}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{(Z_3)-(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}(Z_2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \boldsymbol{Z}.$$

Schritt 3 Herauslesen der Lösungen:

- Die Zielmatrix für den ersten LGS ist vom Typ 2 (Trapezform). Das erste LGS hat somit **undendlich viele Lösungen** mit einem freien Parameter (eine Gerade im $\mathbb{R}^3$):

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Die Zielmatrix für den zweiten LGS ist vom Typ 3. Das zweite LGS hat somit **keine Lösung** (die letzte Gleichung, $0 = 1$, ist unmöglich).

2.2.4 Kochrezept für Gauß-Algorithmus

Kochrezept 2.1 (Gauß-Algorithmus)

Schritt 1 Man bestimme die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ des LGS:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (Z_1) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (Z_m) \end{cases} \rightsquigarrow [\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Beachte: Der vertikale Strich in der erweiterten Matrix hat keine mathematische Bedeutung, aber hilft, Berechnungen übersichtlicher zu gestalten.

Schritt 2 Man forme die erweiterte Matrix $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ mittels elementarer Zeilenoperationen um, bis man die Zielmatrix $\boldsymbol{Z}$ bekommt. Dabei sind folgende Zeilenoperationen erlaubt:

- vertauschen von zwei Zeilen;
- eine Zeile mit einer beliebigen Zahl $\alpha \neq 0$ multiplizieren;
- ein beliebiges Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren oder subtrahieren.

Es resultieren 3 mögliche Fälle für die Zielmatrix $\boldsymbol{Z}$:

Fall 1: Dreiecksform

$$\boldsymbol{Z} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 1 & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Genau eine Lösung

Fall 2: Treppenform

$$\boldsymbol{Z} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{k_1 \text{ Spalten}}} & 0 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{k_2 \text{ Spalten}}} & 0 & \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{k_r \text{ Spalten}}} & 0 \end{array}\right]$$

Unendlich viele Lösungen mit $k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ freien Parametern. Alle Variablen direkt neben dem Pivot-Element sind freie Variablen.

Fall 3

$$Z = \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & \cdots & \star & \star & \cdots & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \star & \star & \cdots & \star & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \star & \star \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \circledast \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \circledast \end{array}\right] \qquad \text{mit } \circledast \neq 0$$

Keine Lösung

- $\star$ = Platzhalter für eine beliebige Zahl (Null auch erlaubt).
- $\circledast$ = Platzhalter für eine von Null verschiedene Zahl ($\circledast \neq 0$).

Schritt 3 Aus der Zielmatrix $\boldsymbol{Z}$ kann die Lösungsmenge direkt abgeleitet werden.

- **Fall 1.** Die Lösung erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen. Man beginnt mit der letzten (untersten) Gleichung, welche nach x_n aufgelöst wird. Dann setzt man diese Lösung in der zweitletzten Gleichung ein und löst nach x_{n-1} auf. So geht man weiter, bis x_1 gefunden ist.
- **Fall 2.** Man braucht k freie Parameter $t, s, \cdots$. Man setzt die freien Unbekannten gleich $t, s, \cdots$ und löst die $n-k$ von Null verschiedenen Gleichungen auf. Somit erhält man die allgemeine Lösungsmenge, welche von $t, s, \cdots$ abhängt. Es gilt:

  $$\text{Anzahl freie Parameter } = n - \text{ Anzahl von Null verschiedenen Zeilen in } \boldsymbol{Z},$$

  wobei n die Anzahl der Unbekannten ist.
- **Fall 3.** Die Lösungsmenge ist leer.